Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea f una función holomorfa en $B(a,R)$. Para todo $r: 0<r<R$, argumentar la existencia de las derivadas de cualquier orden de f en $B(a,r)$ y demostrar que

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,e^{-int}\,dt \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

(b) Sea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1 \quad \text{y} \quad (x-1)^2+y^2<4\}$. Resolver:

$$\nabla^2 u(x,y)=0 \quad \text{para} \quad (x,y)\in D$$
$$u(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x^2+y^2=1, (x,y)\neq(-1,0) \\ 1 & \text{para} \quad (x-1)^2+y^2=4, (x,y)\neq(-1,0) \end{cases}$$

y graficar $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : u(x,y)=1/2\}$.

Ejercicio 2.

(a) Obtener la serie de Fourier en senos de $f(x)=x(x-1)$ en el intervalo $[0,1]$. Estudiar a qué valor converge en cada punto del intervalo.

(b) Una cuerda está inicialmente en reposo sobre el eje x y se mantiene fija en sus extremos $x=0$ y $x=1$. Si se la deja caer bajo su propio peso, el desplazamiento $u(x,t)$ satisface la ecuación $u_{xx}-g=u_{tt}$ para $0<x<1$ y $t>0$, siendo g la aceleración de la gravedad. Hallar el desplazamiento $u(x,t)$ para $0<x<1$ y $t>0$.

Ejercicio 3.

(a) Probar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función impar y $\hat{f}(w)$ es su transformada de Fourier, entonces $i\hat{f}(w)$ es real para todo w real y es una función impar.

(b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{t}{1+t^4}$. Probar que existe $\hat{f}(w)$ la transformada de Fourier de f y calcular la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} w\hat{f}(w)dw$.

Ejercicio 4.

(a) Enunciar y demostrar cómo se relacionan la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones con las transformadas de Laplace de ambas funciones, especificando las hipótesis necesarias para su validez.

(b) Resolver, aplicando transformada de Laplace, la ecuación:

$$y'(t)+25\int_0^t y(t-w)e^{-10w}\,dw=4 \quad t>0$$

con condición inicial nula.